

Mały trening przed maturą

Zestaw 1

1. Dla jakich wartości parametru k równanie: $x^2 - 5x + k = 0$ ma dwa pierwiastki przeciwnych znaków?
 2. Co to jest symetralna odcinka?
Narysuj trójkąt i opisz na nim okrąg.
 3. Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane: $a_5 = 19$ i $a_9 = 35$
 - 3*. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego to:
$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a-b)^2 + (a+b+c)^2$$
-

Zestaw 2

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:
$$y = \log(x^2 - 4) + \sqrt{6 - 2x}$$
 2. W równoległoboku ABCD dane są: $|AB| = a = 12\text{cm}$; $|AD| = b = 10\text{cm}$; $\alpha = 45^\circ$ Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku
 3. Mamy dwie urny: w jednej z nich są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej 1 biała i 4 czarne. Z urny przypadkowo wybranej wyciągamy kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kulę białą, jeżeli prawdopodobieństwo wyboru każdej z urn jest równe 0,5?
 - 3*. Sformułuj twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i podaj jego dowód.
-

Zestaw 3

1. Rozwiąż nierówność:
$$x + \frac{x-1}{4} - \frac{2x-5}{2} < 1 - \frac{x+3}{3}$$
2. Dana jest przekątna przekroju osiowego walca $d = 11\text{cm}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego walca o wysokości $h = 9\text{cm}$.
3. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym
$$b_n = \frac{an^2 - 1}{(a-1)n^2 + n}$$

Dla jakiej wartości parametru a granica tego ciągu wynosi $\frac{1}{2}$? Dla wyznaczonej wartości a zbadaj monotoniczność tego ciągu.
- 3*. Wyznacz wartość parametru a tak, aby granicą była liczba mniejsza spośród liczb spełniających równanie: $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.

Zestaw 4

1. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu o przekątnej d .
2. Podaj związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Sprawdź tożsamość:

$$(\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

3. Podaj definicję logarytmu. Oblicz x z równości:

$$\log_x 8 = \frac{1}{2}; \log_{16} x = -\frac{1}{4}; \log_2 32 = x$$

- 3*. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$y = \log_2 [1 - \log_{0,5}(x^2 - 5x + 6)]$$

Zestaw 5

1. Podaj definicję potęgi o wykładniku naturalnym, całkowitym, wymiernym oraz twierdzenia o potęgach. Wykonaj działania:

$$\frac{(y^2)^3 \cdot (y^8)^6}{(y^3)^2 \cdot (y^2)^5}$$

2. Dokonaj podziału niezerowego odcinka na 3 części. Z jakiego twierdzenia skorzystałaś(eś)?
3. Jakie znasz metody rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi? Omów je. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 2x - 8y = 6 \end{cases}$$

- 3*. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} (m+1)x - my = 4 \\ 3x - 5y = m \end{cases}$$

jest parą liczb spełniających warunek $\frac{x}{y} \geq 1$.

Zestaw 6

1. Z trzech okręgów o środkach A, B, C każdy jest styczny do pozostałych. Wiedząc, że $|AB|=10\text{cm}$; $|BC|=6\text{cm}$; $|AC|=8\text{cm}$ oblicz promienie tych okręgów.
 2. Dla jakich wartości parametru k równanie:
$$x^2 - 5kx + k = 0$$
ma dwa pierwiastki przeciwnych znaków?
 3. Jakie zdarzenia nazywamy niezależnymi?
Niech A jest zdarzeniem, w którym suma wyrzuconych oczek jest równa 8, zaś B zdarzeniem, że za pierwszym razem nie wypadło 6 oczek.
Sprawdź niezależność zdarzeń A i B .
 - 3*. Udowodnij, że jeżeli $A \cup B = \Omega$ i jeżeli A i B są niezależne, to $P(A)=1$ albo $P(B)=1$.
-

Zestaw 7

1. Podaj wzory skróconego mnożenia. Oblicz:

a) $6^{\frac{2}{3}} \cdot 36^{\frac{2}{3}} (-6) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\left[\left(2 - 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2 + 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$

2. Jakie figury nazywamy przystającymi? Mając dane: A=(1,2); B=(5,2); C=(5,7); D=(2,1); E=(2,5); F=(7,5), sprawdź, czy $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ są przystające.
3. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca, którego powierzchnia po rozwinięciu jest kwadratem o boku a.
- 3*. W stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym wpisano kulę. Oblicz stosunek objętości stożka do objętości kuli.

Zestaw 8

1. Dane są liczby: a=5; b=45, wyznacz liczbę x tak, aby liczby a,x,b tworzyły ciąg arytmetyczny.
2. Podaj definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Wyznacz x z równania:
 $|3x-2|=4$
3. Trójmian kwadratowy:
 $y=3x^2+bx+c$
ma dwa miejsca zerowe: $x_1=-3$; $x_2=1$. Wyznacz współczynniki b,c.
- 3*. Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów pierwiastków równania:
 $x^2+(k-3)x+k-5=0$
jest równa 19?

Zestaw 9

1. Sprowadź podane wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\left[\left(\frac{3}{a-b} + \frac{3a}{a^2-b^2} \right) \div \frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2} \right] \cdot \frac{3}{a+b}$$

2. Dane są wielomiany: $W(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$; $G(x) = (x^2 - ax + b)(x - 2)$. Wyznacz a, b tak, aby wielomiany W(x) i G(x) były równe.
3. Podaj definicję, własności oraz przykłady ciągu geometrycznego.
- 3*. Rozwiąż równanie, w którym prawa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego:

$$\frac{1}{2} \sqrt{10 \cdot 3^{x+1} - 9} = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \dots$$

Zestaw 10

1. Rozwiąż graficznie układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + y = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

2. Podaj definicję ciągu arytmetycznego. Mając dane: $a_1=3$ i $a_5=9$, oblicz a_{10} i S_{10} .
3. Na sześcianie o długości krawędzi a opisano kulę i wpisano kulę. Oblicz stosunek objętości kuli opisanej do objętości kuli wpisanej w sześcian.
- 3*. W kulę o promieniu R wpisano stożek o kącie rozwarcia α . Oblicz objętość i pole powierzchni stożka.
-

Zestaw 11

1. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 8, zaś różnica tej liczby i liczby o przestawionych cyfrach jest równa 18. Co to za liczba?
2. Podaj wzór na prawdopodobieństwo warunkowe. Rzucamy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma oczek jest równa 8, pod warunkiem, że za pierwszym razem wypadnie parzysta liczba oczek?
3. Podaj treść twierdzenia sinusów. Dany jest promień $R=3\text{dm}$ okręgu opisanego na trójkącie i dwa kąty: $\alpha=30^\circ$; $\beta=60^\circ$ tego trójkąta. Oblicz pole tego trójkąta.
- 3*. Udowodnij twierdzenie sinusów.
-

Zestaw 12

1. Rzucamy trzema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że choć raz uzyskamy orła.
2. Dany jest ciąg $a_{(n)}$ o wyrazie ogólnym:
- $$a_n = \frac{3n + 1}{n + 2}$$
- a) zbadaj monotoniczność ciągu
b) oblicz granicę tego ciągu
c) zbadaj czy a_3 ; a_5 ; a_7 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.
3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.
- 3*. Dla jakich wartości parametru m równanie:
 $(m+2)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$
ma dwa pierwiastki dodatnie?
-

Zestaw 13

1. Podaj związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α wiedząc, że:

$$\sin\alpha = -\frac{2}{3} \quad \text{i} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi.$$

2. Oblicz pole powierzchni i objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o polu: $S=16\sqrt{3}$.
3. Podaj definicję ciągu geometrycznego. Wyznacz ciąg geometryczny mając dane: $a_2=2$ i $a_5=16$.

- 3*. Rozwiąż nierówność:

$$1+(1-x^2)+(1-x^2)^2+(1-x^2)^3+\dots > 3$$

Zestaw 14

1. Oblicz 27% liczby $\frac{\left(87\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right) : 2\frac{2}{3}}{0,04}$.

2. Oblicz objętość walca, w którym obwód podstawy wynosi 20π cm, a przekątna przekroju osiowego walca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze $\alpha=30^\circ$.
3. Podaj sposoby rozkładu wielomianu na czynniki. Rozłóż na czynniki:

a) $a^2-ac+ab-bc$

b) $x^2+y^2+2xy-64$

c) $16x^2y^2-4m^2$

- 3*. Sprowadź podane wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\left[\left(\frac{3}{a-b} + \frac{3}{a^3-b^3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} \right) : \frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2} \right] \cdot \frac{3}{a+b}$$

Zestaw 15

1. Podaj definicję wielomianu jednej zmiennej. Dla jakiej wartości parametru m wielomian: $W(x)=x^3+mx^2+m^2x-7$ jest podzielny przez dwumian $(x-1)$?
2. Naskicuj wykres funkcji $f(x)=3^{-x}+1$ oraz omów jej własności.
3. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Czy zdarzenia: A-na pierwszej kostce wypadły co najmniej 4 oczka, B- suma wyrzuconych oczek jest większa niż 7, są niezależne?
- 3*. Wykaż, że $P(A')=1-P(A)$.
-

Zestaw 16

1. Podaj definicję przekształcenia izometrycznego. Jakie znasz przekształcenia izometryczne na płaszczyźnie? Przekształć trójkąt ABC przez jedno z nich.
 2. Rozłóż wielomian $W(x)=x^3-2x^2-9x+18$ na czynniki.
 3. Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane: $a_5=19$ i $a_9=35$.
 - 3*. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to:
 $(a^2+b^2+c^2)=(a-b+c)(a+b+c)$
-

Zestaw 17

1. W trapezie równoramiennym długości podstaw wynoszą 8cm i 14cm, a kąt rozwarty 135° . Oblicz pole i obwód tego trapezu.
2. Wykonaj działania:

$$\left[\left(-1\frac{1}{2} \right)^{-2} - 3^0 \right]^{-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2,5)^2.$$

3. Omów działania na zbiorach. Niech A-zbiór dzielników liczby 20, B-zbiór dzielników liczby 32. Wyznacz $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.
- 3*. Dane są zbiory:

$$A = \left\{ (x, y); x \in \mathbb{R}; \Delta y \in \mathbb{R} \Delta x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$
$$B = \left\{ (x, y); x \in \mathbb{R} \Delta y \in \mathbb{R} \Delta |x-1| < 2 \right\}$$

Zilustruj na oddzielnych rysunkach w prostokątnym układzie współrzędnych XOY te zbiory.

Wyznacz zbiory: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$

Zestaw 18

1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

2. Podaj wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Z klasy I i II wybieramy losowo jedną osobę w następujący sposób: rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł to wybieramy osobę z klasy I, a jeśli reszka to z klasy II.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wylosowana osoba jest chłopcem, wiedząc, że w klasie I jest 15 dziewcząt i 10 chłopców, a w klasie II jest 20 dziewcząt i 10 chłopców.

3. Oblicz x z równości: $2^{2x-3} = 2$.

- 3*. Wyznacz wartości parametru a , tak aby granicą ciągu

$$b_n = \frac{an^2 - 1}{(a-1)n^2 + n}$$

była liczba mniejsza spośród liczb spełniających równanie: $4^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 = 0$

Zestaw 19

1. Rozwiąż równanie:
$$(x+3)^2 - (x-5)^2 = 16(x-1).$$
 2. Co nazywamy podobieństwem? Długości boków prostokąta są równe: 3cm i 5cm. Oblicz pole prostokąta do niego podobnego o obwodzie 80 cm.
 3. W pewnym ciągu arytmetycznym siódmy wyraz jest równy 17, a suma siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 77. Wyznacz n wiedząc, że $S_n = 140$.
 - 3*. Wykaż, że liczby $a = 3\sqrt{2}$; $b = 10 - 7\sqrt{2}$; $c = 34 - 24\sqrt{2}$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
-

Zestaw 20

1. Zbadaj dla jakiej wartości parametru b układ równań:
$$\begin{cases} x+y = b \\ bx-y = 2 \end{cases}$$
 jest układem równań niezależnych, zależnych, sprzecznych.
 2. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n-10}{n+1}$.
 - a) oblicz jego granicę
 - b) zbadaj monotoniczność
 - c) dla jakich wartości „n” wyrazy ciągu są mniejsze od -1?
 3. Walec i stożek mają równe: tworzące, pola powierzchni bocznych i równe objętości.
 - a) oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.
 - 3*. Jaka powinna być wysokość walca, aby jego objętość była równa 7π ?
-

Zestaw 21

1. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (-m^2 + 6m - 5)x + 7$ jest rosnąca?
 2. Pole trapezu równoramiennego jest równe $39\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Ramię długości $6\sqrt{3} \text{ cm}$ tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze 30° . Oblicz obwód trapezu i długość przekątnej.
 3. Oblicz n i S_n ciągu arytmetycznego mając dane: $a_1 = -5$; $r = -3$; $a_n = -101$.
 - 3*. Wykaż, że jeśli $(a+b)(a+c)(b+c) \neq 0$ i liczby $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{a+c}$; $\frac{1}{b+c}$ tworzą ciąg arytmetyczny, to także liczby a^2, b^2, c^2 tworzą ciąg arytmetyczny.
-

Zestaw 22

1. Wyprowadź wzory na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.
 2. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, którego tworząca $l=20\text{cm}$ tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha=60^\circ$.
 3. Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} 3x+2y=9 \\ -4x+3y=-29 \end{cases}$$
 - 3*. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby pierwiastków układu z niewiadomymi x i y w zależności od wartości parametrów:
$$\begin{cases} x+y=a \\ mx+12y=0 \end{cases}$$
-

Zestaw 23

1. Podaj warunek prostokątności i równoległości dwóch prostych. Napisz równanie prostej prostopadłej i prostej równoległej do prostej $y=3x+6$ i przechodzącej przez punkt $A(-5;3)$
2. Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi $301,44\text{ cm}^2$. Pole powierzchni bocznej wynosi $188,4\text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.
3. Rozwiąż równanie: $\log_2(x+2)+\log_2(x+14)=6$.
- 3*. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji

$$f(x)=\log\left[(2m-3)x^2+(6-m)x+\frac{1}{7}(m-9)\right]$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

Zestaw 24

1. Podaj cechy podobieństwa trójkątów. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Wiedząc, że $|AB|=5\text{cm}$, $|BC|=8\text{cm}$, $|AC|=12\text{cm}$, $|B'C'|=20\text{cm}$, oblicz długości pozostałych boków trójkąta $A'B'C'$.
 2. Dane są wielomiany $W(x)=2x^2+6x-1$ i $P(x)=x^2-6x$. Oblicz $W(x) \cdot P(x) - W(x)$.
 3. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że $a_1=-3$; $q=0,5$.
 - 3*. Współczynniki a, b, c równania $ax^2+bx+c=0$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a ich suma równa się 24. Jednym z rozwiązań jest $\left(-\frac{1}{5}\right)$. Oblicz współczynniki równania.
-

Zestaw 25

1. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$$

2. Oblicz pole powierzchni i objętość ostrosłupa czworokątnego prawidłowego, którego krawędź podstawy $a=8\text{cm}$, kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy $\alpha=60^\circ$
3. Naszkicuj wykres funkcji $y=\sin x$ i omów jej własności.
- 3*. Znajdź wszystkie pierwiastki równania $1+\sin x=\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x+\dots$ $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.
-

Opracowała:

Kornelia Grabowska