Scenariusz lekcji z wykorzystaniem programu Graphic Calculus

Przekształcenia wykresów funkcji

Czas trwania: 2 jednostki lekcyjne.

1. Cele lekcji
2. Wstęp
3. Tok lekcji
4. Podsumowanie
5. Podanie i omówienie pracy domowej

Cele lekcji

Cele główne

- doskonalenie umiejętności posługiwania się programem *Graphic Calculus,*
- kształtowanie u uczniów umiejętności stawiania hipotez i argumentowania,
- kształtowanie u uczniów postawy dociekliwości, dokładności logicznego myślenia i krytycznej oceny własnych osiągnięć w rozwiązywaniu problemów,

Cele szczegółowe:
Po lekcji uczeń:

- potrafi wywnioskować jak otrzymać wykresy funkcji:
$$f(x-a),\ f(x)+b,\ f(x-a)+b,\ f(-x),\ -f(x),\ -f(-x),\ |f(x)|,\ f(|x|)$$
- potrafi samodzielnie sporządzić wykres dowolnej funkcji stosując poznane przekształcenia

Metody: dyskusja kierowana, burza mózgów, praca z komputerem.
Formy pracy: praca zbiorowa i indywidualna przy komputerach.

Wstęp

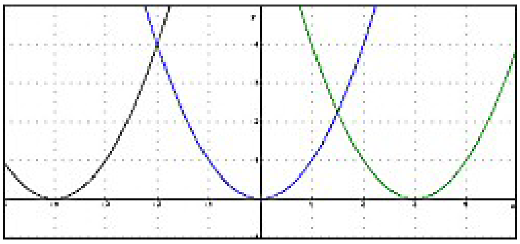
Wykresy funkcji możemy sporządzić metoda bezpośrednią, nanosząc na płaszczyznę z układem współrzędnych punkty $(x, f(x))$. Możemy też je sporządzić przekształcając wykresy innych, mniej skomplikowanych funkcji.
W poznaniu reguł rządzących przekształceniami wykresów pomoże nam komputer. Będziemy obserwować wykresy podstawowych funkcji, oraz wykresy funkcji powstałych przez pewne zmodyfikowanie wzorów funkcji podstawowych, korzystając przy tym z programu *Graphic Calculus (GC).*

Tok lekcji

1. Przesunięcia równoległe (translacje) wykresów.

a) W jednym układzie współrzędnych sporządzimy wykresy funkcji określonych wzorami:

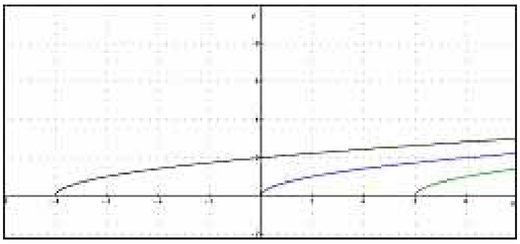
- $y = x^2$
- $y = (x-3)^2$
- $y = (x+4)^2$



Jakie jest położenie wykresów funkcji wobec wykresu funkcji podstawowej $y = x^2$?

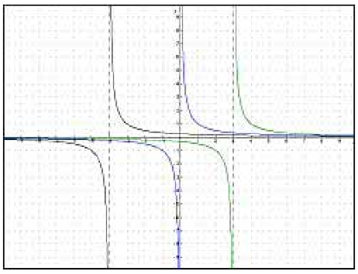
Sporządźmy dodatkowo wykresy funkcji określonych wzorami:

- $y = \sqrt{x}$
- $y = \sqrt{x-3}$
- $y = \sqrt{x+4}$



Następnie sporządzamy i porównujemy wykresy funkcji danych wzorami:

- $y = \frac{1}{x}$
- $y = \frac{1}{x-3}$
- $y = \frac{1}{x+4}$

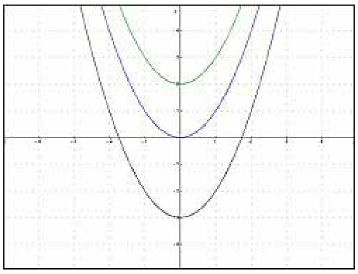


Analizując wykresy możemy wywnioskować, że:

Aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem $f(x-a)$ *należy przesunąć wykres funkcji dany wzorem* $y = f(x)$ *o wektor* $[a, 0]$, *który jest równoległy do osi x.*

b) Sporządzamy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji danych wzorami:

- $y = x^2$
- $y = x^2 + 2$

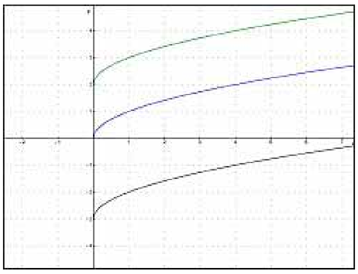


- $y = x^2 - 3$

Jakie jest położenie otrzymanych wykresów funkcji względem wykresu funkcji $y = x^2$?

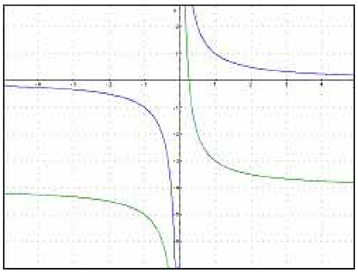
Następnie sporządzamy dwa zestawy wykresów funkcji określonych wzorami:

- $y = \sqrt{x}$
- $y = \sqrt{x} + 2$
- $y = \sqrt{x} - 3$



oraz

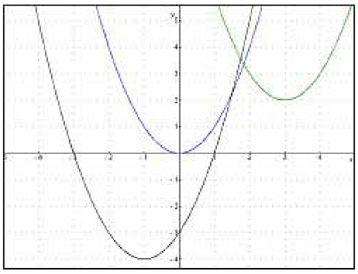
- $y = \dfrac{1}{x}$
- $y = \dfrac{1}{x} - 4$



Wniosek:
Aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem $y = f(x) + b$ należy przesunąć wykres funkcji danej wzorem $y = f(x)$ o wektor $[0, b]$, który jest równoległy do osi y.

c) Sporządzamy i analizujemy wykresy funkcji danych wzorami:

- $y = x^2$
- $y = (x-3)^2 + 2$
- $y = (x+1)^2 - 4$

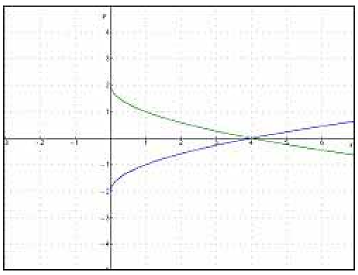


Wniosek:
Aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem $y = f(x-a) + b$ należy przesunąć o wektor $[a, b]$ wykres funkcji danej wzorem $y = f(x)$.

2. Odbicia symetryczne wykresów

a) w jednym układzie współrzędnych sporządzamy wykresy dwóch funkcji o wzorach

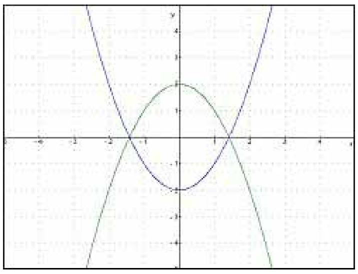
- $y = \sqrt{x} - 2$



- $y=-\left(\sqrt{x}-2\right)$

oraz

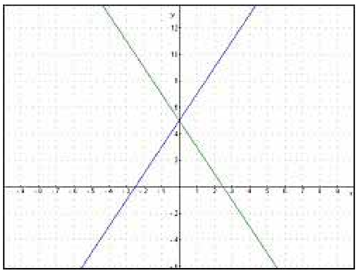
- $y=x^2-2$
- $y=-\left(x^2-2\right)$



Analizując powyższe wykresy (jak również inne wykonane w ramach samodzielnych ćwiczeń) możemy wywnioskować:
Wykres funkcji określonej wzorem $y=-f(x)$ *jest obrazem wykresu funkcji danej wzorem* $y=f(x)$ *w symetrii osiowej względem osi x.*

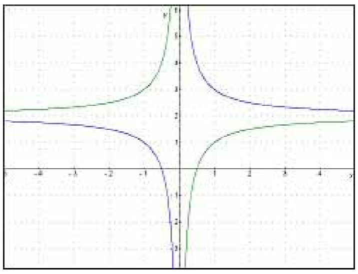
b) Wykonujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji danych wzorami:

- $y=2x+5$
- $y=2(-x)+5$



oraz

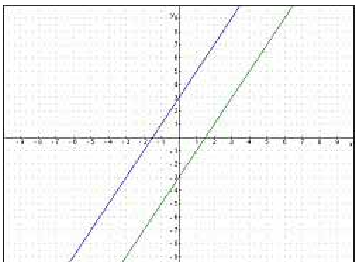
- $y=\dfrac{1}{x}+2$
- $y=\dfrac{1}{-x}+2$



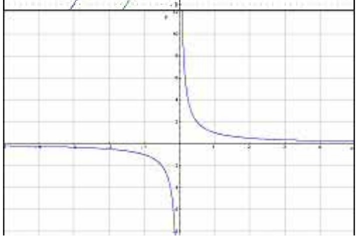
Wniosek:
Wykres funkcji określonej wzorem $y=f(-x)$ *jest obrazem wykresu funkcji danej wzorem* $y=f(x)$ *w symetrii osiowej względem osi y.*

c) Zwróćmy uwagę na wzajemne położenie wykresów funkcji w każdej z poniższych par funkcji danych wzorami:

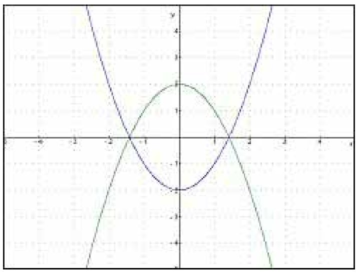
- $y=2x+3$
- $y=-\left(2(-x)+3\right)$



- $y=\dfrac{1}{x}$



- $y = -\dfrac{1}{-x}$



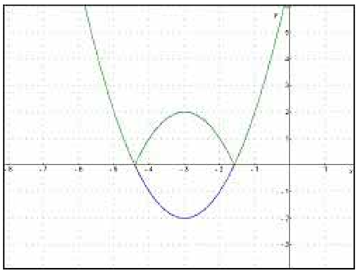
- $y = x^2 - 2$
- $y = -\left((-x)^2 - 2\right)$

Wniosek:
Wykres funkcji określonej wzorem $y = -f(-x)$ *jest obrazem wykresu funkcji danej wzorem* $y = f(x)$ *o symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.*

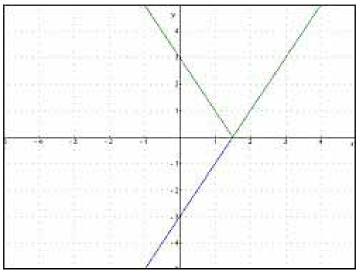
3. Wykresy funkcji z wartością bezwzględną

Sprawdzimy na przykładach jak wpływa na wykres funkcji wprowadzenie wartości bezwzględnej do wartości funkcji.

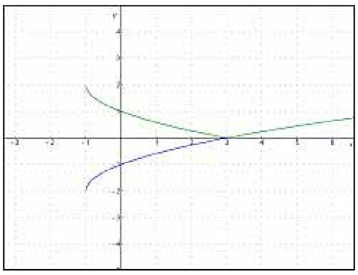
a) Sporządzamy wykresy funkcji określonych wzorami:



- $y = (x+3)^2 - 2$
- $y = \left|(x+2)^2 - 2\right|$



- $y = 2x - 3$
- $y = |2x - 3|$



- $y = \sqrt{x+1} - 2$
- $y = \left|\sqrt{x+1} - 2\right|$

Obserwujemy, że w każdym przypadku nie ulega zmianie cześć wykresu położona nad osią x

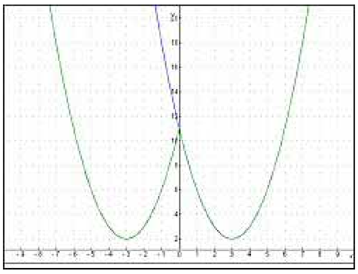
$(y > 0)$, zaś część położona pod osią x uległa odbiciu symetrycznemu względem tej osi.

Wniosek:

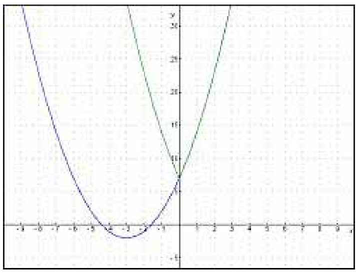
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$ *należy punkty* (x, y) *wykresu, których* $y < 0$, *przekształcić przez symetrię osiową względem osi x.*

b) Sporządźmy wykresy funkcji danych wzorami:

- $y = (x-3)^2 + 2$
- $y = (|x|-3)^2 + 2$



- $y = (x+3)^2 - 2$
- $y = (|x|+3)^2 - 2$



Wniosek:

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$ *należy punkty* (x, y) *wykresu, których* $x > 0$ *przekształcić przez symetrię osiowa względem osi y.*

Podsumowanie

Wnioski z obserwacji przykładowych wykresów uzasadnimy w sposób algebraiczny na kolejnej lekcji matematyki poza pracownią komputerową.

Podanie i omówienie pracy domowej

Sporządź wykresy funkcji dane wzorami:

a) $\sqrt{x-2} + 4$

b) $y = \left|\sqrt{x+3} - 2\right|$

c) $y = (|x|-1)^2 - 4$

d) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$

e) $y = \left|-2x+1\right|$

f) $y = \left|x^2 - 4\right| + 2$

Literatura:

Anna Rybak – *Komputer na lekcjach matematyki w szkole średniej*

Autor: Julia Borek