Metody niealgebraiczne w rozwiązywaniu zadań tekstowych

O tym, czym jest rozwiązywanie zadań w nauczaniu matematyki, pisze G. Polya: „Nauczanie na lekcjach matematyki rozwiązywania zadań daje znakomitą sposobność do przekazania pewnych pojęć i ukształtowania określonych nawyków myślowych, co jest podstawowym składnikiem ogólnej kultury”[1].

W klasach gimnazjalnych rozwiązujemy zadania tekstowe, postępując na ogół następująco:

a. ustalamy wielkości dane i szukane,
b. podajemy warunki, które muszą spełniać wielkości szukane,
c. znajdujemy zależności między wielkościami danymi i szukanymi,
d. układamy równanie lub układ równań liniowych,
e. rozwiązujemy równanie lub układ równań,
f. sprawdzamy rozwiązanie z warunkami zadania,
g. zapisujemy odpowiedź.

Rozwiązując w ten sposób zadanie, możemy jedynie nauczyć dzieci pewnego schematu, który sprowadza się do umiejętności rozwiązywania równań lub układów równań. Założenie to opieram na swoich obserwacjach. Często etapy: a, b, c nauczyciele przeprowadzają sami lub z najlepszymi uczniami w klasie. Skutkiem takiego postępowania jest powierzchowne rozumienie zadania.

W okresie wieloletniej pracy w szkole podstawowej i gimnazjum zaobserwowałam, że warto również pokazać uczniom inne metody rozwiązywania zadań tekstowych. Można spotkać się z opiniami, iż szkoda jest czasu na rozwiązywanie kilkoma sposobami jednego zadania, ale moim zdaniem każdy pomysł rozwiązania zadania to sukces dla ucznia. Założenie to ma szczególne znaczenie dla uczniów słabych, którzy utwierdzają się w przekonaniu, że dobre chęci i aktywność mogą doprowadzić do rozwiązania i zostać nagrodzone dobrą oceną.

Poniżej podaję przykłady rozwiązania niektórych zadań metodami niealgebraicznymi.

Zadanie 1

W ogrodzie mandaryna były bażanty i króliki. Miały one 35 głów i 94 nogi. Ile było bażantów a ile królików?

To zadanie można rozwiązać w prosty sposób za pomocą układu równań:

x – liczba bażantów
y – liczba królików $\qquad x, y \in N$
2x – ilość nóg bażantów
4y – ilość nóg królików

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu otrzymaliśmy parę liczb (23;12). Wobec tego w ogrodzie były 23 bażanty i 12 królików.

To samo zadanie można rozwiązać nie używając niewiadomych.

Załóżmy, że wszystkie zwierzęta usiadły na dwóch łapach. Wówczas będą widoczne 94 – 2 · 35 = 24 nogi, przy czym będą widoczne jedynie nogi królików. Zatem królików będzie 24 : 2 = 12, a bażantów 35 – 12 = 23.

W ten sam sposób możemy rozwiązać również inne zadanie.

Mama kazała Jankowi zebrać z parapetu martwe muchy i pająki. Janek policzył, że jest ich razem 12 i mają 80 odnóży. Ile było pająków, a ile much na parapecie? (Pająki mają po 8 odnóży, a muchy po 6).

Zadanie 2

Ile brzoskwiń mieści koszyk, z którego połowę całej zawartości i jeszcze jedną brzoskwinię oddam pierwszemu, drugiemu połowę reszty i jedną brzoskwinię, a trzeciemu połowę pozostałych i trzy brzoskwinie i wtedy koszyk będzie pusty?

To zadanie możemy rozwiązać za pomocą równania w następujący sposób:

x – liczba brzoskwiń w koszyku

$\frac{x}{2} + 1$ - liczba brzoskwiń otrzymana przez pierwszego

$(\frac{1}{2}\,(x-(\frac{x}{2}+1))+1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ - liczba brzoskwiń otrzymana przez drugiego

$(\frac{1}{2}\,(x-(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}))+3 = \frac{x}{8}+\frac{9}{4}$ - liczba brzoskwiń otrzymana przez trzeciego

Rozwiązując równanie:

$$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{9}{4} = x$$

otrzymujemy, że x = 30, czyli wszystkich brzoskwiń w koszyku było 30.

A oto inny sposób rozwiązania tego zadania: zauważmy, że liczba brzoskwiń trzeciego jest łatwa do obliczenia. Skoro po otrzymaniu połowy pozostałych brzoskwiń oraz trzech owoców, w koszyku nie było już brzoskwiń, to trzeci dostał wszystkie pozostałe owoce i było ich 6. Jest to liczba o jeden mniejsza od połowy liczby brzoskwiń jakie pozostały w koszyku po obdarowaniu owocami pierwszego. Zatem po pierwszym podziale w koszyku było (6 + 1) · 2 = 14 owoców. Liczba ta z kolei jest o jeden mniejsza od połowy całej liczby owoców. Wobec tego wszystkich brzoskwiń w koszyku było (14 + 1) · 2 = 30.

Prowadząc ten sam tok rozumowania, można rozwiązać także następujące zadanie.

Trzech uczniów kupiło pewną liczbę ołówków. Podzielili się nimi między sobą w ten sposób, że pierwszy z nich otrzymał połowę całości i jeden ołówek; drugi otrzymał 1/3 reszty i dwa ołówki; a trzeci ¼ reszty i sześć pozostałych ołówków. Ile ołówków kupili uczniowie?

Zadanie 3

Dziadek i babcia mają razem 120 lat. Dziadek jest o tyle lat starszy od babci, ile lat miała babcia wtedy, gdy dziadek miał tyle lat, ile babcia ma teraz. Ile lat ma dziadek i ile lat ma babcia?

Rozwiązanie za pomocą układu równań:
x – liczba lat dziadka $\qquad\qquad$ $x > y$ i $x, y \in N$
y – liczba lat babci

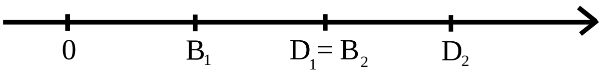
Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 3y = 2x \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para liczb (72;48). Dziadek ma więc 72 lata, a babcia 48 lat.

Inny sposób rozwiązania tego zadania:

Na osi liczbowej zaznaczamy punkty B_1 i D_1, które odpowiadają odpowiednio liczbie lat babci i dziadka, gdy dziadek miał tyle lat, ile ma teraz babcia.



Przez B_2 i D_2 oznaczamy punkty, które odpowiadają odpowiednio liczbie lat babci i dziadka w chwili obecnej.
Z treści zadania wynika, że $B_2 = D_1$
oraz

$$|\overline{OB_1}| = |\overline{B_1D_1}| = |\overline{B_2D_2}|$$

Zatem liczba lat dziadka jest trzy razy większa od liczby lat babci w chwili reprezentowanej przez punkt B_1. Z kolei liczba lat babci jest dwa razy większa od liczby lat babci w chwili reprezentowanej przez punkt B_1. Suma lat babci i dziadka jest zatem pięć razy większa od liczby lat babci w chwili reprezentowanej przez punkt B_1. Babcia miała więc w chwili reprezentowanej przez punkt B_1 - 120 : 5 = 24 lata. Babcia ma zatem obecnie 48 lat, a dziadek 72 lata.

Podobnie możemy rozwiązać zadanie następujące.

Starszy z braci powiedział do młodszego: „Mam trzy razy więcej lat, niż ty miałeś wtedy, gdy ja miałem tyle lat, ile ty masz obecnie”. Ile lat ma każdy z braci, jeśli razem mają 30 lat?

Podane w niniejszym artykule przykładowe metody rozwiązywania niektórych zadań metodami niealgebraicznymi dowodzą tezy założonej we wstępie – warto rozwiązywać zadania metodami niealgebraicznymi. Takie sposoby rozwiązania zasługują na uwagę nauczycieli i wykorzystanie podczas różnego typu zajęć z matematyki (np. lekcji, zajęć wyrównawczych, zajęć koła przedmiotowego). Uczą młodzież twórczego myślenia, oryginalnego sposobu rozwiązywania problemów. Dają ponadto uczniom słabszym wiarę we własne możliwości. W swej praktyce pedagogicznej stosuję metody rozwiązywania niektórych zadań metodami niealgebraicznymi od wielu lat i zawsze przynosi to pozytywne rezultaty.

Bibliografia:
1. G. Polya, Odkrycia matematyczne – o rozumieniu uczenia się i nauczania rozwiązywania zadań, WNT, Warszawa 1975
2. J. Kaja, O niealgebraicznym rozwiązywaniu zadań tekstowych, WSiP, Warszawa 1986

Małgorzata Morawiec
nauczycielka matematyki
w Gimnazjum nr 9 im. A. Mickiewicza w Częstochowie

[1] G. Polya, Odkrycia matematyczne – o rozumieniu uczenia się i nauczaniu rozwiązywania zadań, WNT, Warszawa 1975